Пусть квадрика  аффинного пространства  в репере  задается уравнением

,

где

 ‑ симметрическая матрица, ранг которой отличен от нуля,

 ‑ строка коэффициентов,

 ‑ вещественное число (свободный член).

Для аффинного преобразования  с координатным выражением



(здесь  ‑ столбец координат образа точки с координатным столбцом ) **уравнение образа ** квадрики  будет иметь вид  или

 .

*Л.Ч.*

.

Мы учли, что  ‑ матрица размера 1x1, и поэтому

.

Значит, **уравнение образа ** можно записать в виде

.

***Нормальные уравнения.***

**Лемма 1.** Отображение  с координатным выражением

 или , где 

является аффинным преобразованием.

Это аффинное преобразование назовем перенумерацией переменных.

**Доказательство**.

Достаточно заметить, что  ‑ невырождена.

***Замечание 1****. Известно, что для любой симметрической матрицы  существует невырожденная матрица  такая, что  есть диагональная матрица*

* .*

*При этом  и число , называемое сигнатурой, не зависит от выбора матрицы .*

Для уравнения квадрики  пусть ** ‑ такая матрица, что . Подействуем на  аффинным преобразованием . Уравнение фигуры  будет иметь вид

,

или

.

Выделяя полные квадраты, последнее уравнение можно переписать в виде



Подействуем на  аффинным преобразованием

.

Уравнение фигуры  будет

.

Разберем подробнее, какого типа может быть уравнение в зависимости от параметров  () и .

**1 а**. . В этом случае уравнение имеет вид



или

.

Разделив последнее равенство на , получим

.

Если , то имеет вид

.

Если же , то, перенумеровав переменные (а это аффинное преобразование), преобразуем к виду

.

Обобщая, получим, что, если , то уравнение имеет вид

,

где  либо , а . Фигура , задаваемая этим уравнением, лежит в одной орбите с . Применив к  аффинное преобразование , где , получим фигуру , аффинно эквивалентную квадрике  и имеющую уравнение

.

**1 б**. . В этом случае уравнение имеет вид

. Умножая последнее уравнение на  и, при необходимости делая замену переменных, мы всегда можем перейти к уравнению

,

где положительных коэффициентов при квадратах не меньше чем отрицательных то есть . При этом уравнение задает фигуру , лежащую в одной орбите с .

**2.** Среди чисел   такое, что коэффициент  в отличен от нуля.

Не ограничивая общности (если надо – перенумеруем переменные), можно считать, что . Подействуем на фигуру  (именно она задается уравнением ) аффинным преобразованием

.

Фигура  будет иметь уравнение



или

.

Умножив последнее равенство на  и, если необходимо, перенумеровав переменные, получим уравнение

,

где , то есть положительных коэффициентов при квадратах не меньше. Чем отрицательных. При этом уравнение задает фигуру , лежащую в одной орбите с . Таким образом, доказана

**Теорема 1.** В орбите произвольной квадрики , задаваемой в некотором репере уравнением , лежит квадрика , с уравнением вида либо

, где ,

либо

, где ,

либо

, где .

**Определение 1.** Уравнения вида ‑ называются нормальными уравнениями.

**Теорему 1 можно переформулировать** так: в орбите любой квадрики лежит квадрика с нормальным уравнением.

Из замечания 1 с учетом техники доказательства теоремы 1 (все действия однозначны – без выбора) следует, что квадрики с разными нормальными уравнениями одного типа не могут лежать в одной орбите.

Вопрос же возможности принадлежности одной орбите квадрик с нормальными уравнениями различных типов пока остается открытым. Чтобы дать отрицательный ответ и на этот вопрос, надо найти некоторое аффинное свойство квадрик, которое принимает различные значения для квадрик с уравнениями разного типа. Этим и займемся.